- Ondine Ortonormali, MRA e filtri

- Codifica in Sottobande,
  compressione, programmi

- Ondine e Filtri Biortogonali

- Schema di Lifting

- Osservazioni, Lifting Opzionale

Basi ortonormali di ondine per $L^2(\Re)$

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ $t.c$ $\exists\Psi$ $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k)$, $j,k \in Z$

Def ANALISI MULTIRISOLUZIONE (MRA)
$\{V_j\}_{j\in Z}$, chiusi, $V_j \subset V_{j+1}$ tali che

i) $\bigcap V_j = \{0\}$ $\qquad \bigcup V_j$ denso in L^2

ii) $\forall f \in L^2$ $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

iii) $\exists\, \phi \in V_0$ t.c $\{\phi(x-k)\}_{k\in Z}$ è b.o.n. di V_0
ϕ è detta **funzione di scala** della MRA

. $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$, $\{\phi_{j,k}\}_{k\in Z}$ b.o.n V_j

. $\phi(\frac{x}{2}) = \sum h_n \phi(x-n), \quad h_n = < \phi(\frac{x}{2}), \phi(x-n) >$

filtro della MRA $\{h_n\}_n$

maschera $\widehat{h}(\omega) = \sum_n h_n e^{-in\omega}$

. *supp*(ϕ) compatto $\Rightarrow$ $\{h_n\}_n$ è **filtro FIR**

Teo ONDINE ASSOCIATE AD UNA MRA (Mallat, Meyer)

Sia una MRA: ϕ,h

Posto Ψ t.c $\widehat{\Psi}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega)$

dove $\widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{h}(\omega+\pi)}$

Allora $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ è una b.o.n di ondine

. $W_j = < \psi_{j,k} >_{k\in Z} \ \forall j \in Z$

W_j complemento ortogonale di V_j in V_{j+1}

$$L^2(\Re) = \bigoplus_{j\in Z} W_j$$

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{1}^{\infty} \widehat{h}(2^{-p}\omega)$$

. h FIR $\Rightarrow \phi \in L^2(\Re)$, *supp*$(\phi)$ compatto

. Se h FIR e $|\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{h}(\omega + \pi)|^2 = 1 \ \Rightarrow$

ϕ funzione di scala e h **filtro passa basso**

. $g,\ \widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{h}(\omega + \pi)}$ **filtro passa alto**

. Spesso non si riesce a ricavare l'espressione di ϕ a partire da h

Ricostruzione Perfetta

$$\forall j \in Z \quad V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

$$P_j(f) = P_{j-1}(f) + \sum_{k \in Z} < f, \psi_{j-1,k} > \psi_{j-1,k}$$

$$\sum_{k \in Z} a_j[k]\phi_{j,k} = \sum_{k \in Z} a_{j-1}[k]\phi_{j-1,k} + \sum_{k \in Z} d_{j-1}[k]\psi_{j-1,k}$$

$$con \qquad a_j[k] =< f, \phi_{j,k} > \qquad d_j[k] =< f, \psi_{j,k} >$$

Teo RICOSTRUZIONE PERFETTA
(Mallat, 1987)

Formula di scomposizione

$$a_j[p] = \sum_n h[n-2p]a_{j+1}[n]$$
$$d_j[p] = \sum_n g[n-2p]a_{j+1}[n]$$

Formula di ricostruzione

$$a_{j+1}[p] = \sum_n h[p-2n]a_j[n] + \sum_n g[p-2n]d_j[n]$$

Ondine Biortogonali (Cohen, 1992)

Codifica in Sottobande con $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$ filtri FIR

$$\overline{\widehat{h}(\omega)}\,\widehat{\widetilde{h}}(\omega) + \overline{\widehat{h}(\omega+\pi)}\,\widehat{\widetilde{h}}(\omega+\pi) = 1$$

$$\text{posto} \begin{cases} \widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{\widetilde{h}}(\omega+\pi)} \\ \widehat{\widetilde{g}}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{h}(\omega+\pi)} \end{cases},$$

ricostruzione perfetta e **filtri biortogonali**

Allora

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{1}^{\infty} h(2^{-p}\omega) \quad e \quad \widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \prod_{1}^{\infty} \widetilde{h}(2^{-p}\omega)$$

sono due funzioni di scala di MRA

Inoltre

$$\widehat{\Psi}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega) \quad e \quad \widehat{\widetilde{\Psi}}(2\omega) = \widehat{\widetilde{g}}(\omega)\widehat{\phi}(\omega)\,,$$

$$W_j =< \psi_{j,k} >_{k\in Z}, \quad \widetilde{W}_j =< \widetilde{\psi}_{j,k} >_{k\in Z}$$

$$\forall j \in Z \quad V_j \perp \widetilde{W}_j \quad e \quad W_j \perp \widetilde{V}_j$$

Def BASI BIORTOGONALI DI L^2

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ e $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ basi di L^2

i) $\forall j,k,j',k' \in Z \qquad < \widetilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} >= \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$

ii) $\forall f \in L^2(\Re)$

$$f = \sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z} < f, \psi_{j,k} > \widetilde{\psi}_{j,k}$$
$$f = \sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z} < f, \widetilde{\psi}_{j,k} > \psi_{j,k}$$

. **i**) $\Rightarrow W_i \perp \widetilde{W}_j$ se $i \neq j$.

. Due MRA: primale e duale

. Più libertà di costruzione rispetto alle b.o.n.
es. basi biortogonali di spline polinomiali

Lo Schema di Lifting in L^2

Prop LIFTING (Sweldens, 1995)

$\{h^0, \widetilde{h^0}, g^0, \widetilde{g^0}\}$ filtri FIR biortogonali

$s(\omega), t(\omega)$ polinomi trigonometrici qualunque

Un **Lifting** di coefficienti $s(\omega)$

$$\widetilde{h}(\omega) = \widetilde{h^0}(\omega) + \widetilde{g^0}(\omega)\overline{s(2\omega)}$$

$$g(\omega) = g^0(\omega) - h^0(\omega)s(2\omega)$$

produce $\{h^0, \widetilde{h}, g, \widetilde{g^0}\}$ filtri biortogonali

Un **Lifting Duale** di coefficienti $t(\omega)$

$$h(\omega) = h^0(\omega) + \widetilde{g}(\omega)\overline{t(2\omega)}$$

$$\widetilde{g}(\omega) = \widetilde{g^0}(\omega) - \widetilde{h}(\omega)t(2\omega)$$

produce $\{h, \widetilde{h^0}, g^0, \widetilde{g}\}$ filtri biortogonali

Teo SCHEMA DI LIFTING (Sweldens, 1995)

Un Lifting di coefficienti $\{s_k\}_k$ del sistema biortogonale $\{\phi, \widetilde{\phi}^0, \psi^0, \widetilde{\psi}^0\}$ produce $\{\phi, \widetilde{\phi}, \psi, \widetilde{\psi}\}$ sistema biortogonale

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in K} g_k^0 \phi(2x-k) - \sum_{k \in K} s_k \phi(x-k)$$

$$\widetilde{\phi}(x) = 2 \sum_{k \in K} \widetilde{h}_k^0 \widetilde{\phi}(2x-k) - \sum_{k \in K} s_k \widetilde{\psi}(x-k)$$

$$\widetilde{\psi}(x) = 2 \sum_{k \in K} \widetilde{g}_k \widetilde{\phi}(2x-k)$$

. Il Lifting modifica due filtri $g, \widetilde{h}$ e tre funzioni
Infatti $\widehat{\widetilde{\Psi}}(2\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{\phi}(\omega), \quad \widetilde{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widetilde{h}(\omega+\pi)}$

. Lifting e Lifting Duali di $\{h^0, \widetilde{h^0}, g^0, \widetilde{g^0}\}$ FIR producono basi biortogonali $L^2(\Re)$.

Osservazioni

. Il Lifting di un sistema ortonormale
$(\phi = \widetilde{\phi}, h = \widetilde{h})$ rende il sistema biortogonale

. Opportune scelte di $s(\omega), t(\omega)$ aumentano la regolarità o il numero di momenti nulli delle funzioni

. Con un Lifting di $s(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{64}(e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} - 2)$ si alza a due il numero di momenti nulli delle ondine D4

. I programmi sviluppati mostrano maggior compressione in presenza di Lifting

Fattorizzazione in Lifting

Teo FATTORIZZAZIONE IN LIFTING
(Daubechies, Sweldens, 1998)

$\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$ filtri FIR biortogonali
Allora esistono n polinomi di Lifting e Lifting Duale $s_i(\omega)$, $t_i(\omega)$, che modificano i filtri $h^0(\omega) = 1$, $g^0(\omega) = e^{-i\omega}$, riferito alla Lazy Wavelet, nel sistema $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$

. Abbiamo il più generale schema di codifica in sottobande per filtri biortogonali, con $z = e^{-i\omega}$
. Si nota codifica prodotta dai filtri della Lazy Wavelet

Osservazioni

. n Lifting e Lifting Duali modificano

$$\{\phi, \psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}\} \to \{\phi^l, \psi^l, \tilde{\phi}^l, \tilde{\psi}^l\}$$

Vale allora

$$\phi^l = \sum_k s_k \phi(\cdot - k) + \sum_h t_h \psi(\cdot - h)$$
$$\psi^l = \sum_k u_k \phi(\cdot - k) + \sum_h v_h \psi(\cdot - h)$$

e analogamente per $\tilde{\phi}^l, \tilde{\psi}^l$
Le generatrici della MRA primale non si
"mescolano" a quelle della duale

. A (h^0, g^0) non è associata alcuna funzione
Non si può scrivere l'espressione della generica
base biortogonale

. La scelta $\widehat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\widehat{h}(\omega + \pi)}$ è
sostanzialmente unica nel caso ortonormale

$$\phi \mapsto h \dashrightarrow g \mapsto \Psi$$

Ad $\widehat{h}$ si associa solo, $\widehat{g}'(\omega) = e^{ik\omega}\widehat{g}(\omega)$, $k \in Z$
Che equivale a $\Psi_1 = \Psi(\cdot - k)$, $k \in Z$

Lifting Opzionale

Dopo un Lifting primale $\phi^1 = \phi \Rightarrow$
V_j non vengono modificati

$$\begin{aligned} d_j^1[k] &= < f, \psi_{j,k} > \qquad\qquad\qquad \forall j,k \in Z \\ &= < f, \psi_{j,k}^0 > + \sum_{h \in H} s_h < f, \phi_{j,h+k} > \end{aligned}$$

$d_j^1[k] = d_j^0[k] + \sum_h s_h a_j[k+h]$

. Sono richiesti solo $d_j^0[k]$ e $\{a_j[k]\}_k$

. Sul singolo coefficiente il passaggio di Lifting può non essere vantaggioso

. Si sceglie se trasmettere $d_j^0[k]$ o $d_j^1[k]$

. Si ha miglior compressione in alcuni casi